Title	ジェネリック構造の飽和性と安定性 (モデル理論とその代数への応用)
Author(s)	池田, 宏一郎
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1708: 35-45
Issue Date	2010-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/170165
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1708 巻 2010 年 35-45

ジェネリック構造の飽和性と安定性

池田宏一郎* (法政大学経営学部)

Abstract

有限 L 構造のクラス $\mathbf{K}$ が抽象的に定義されているとき，$\mathbf{K}$ ジェネリック構造における飽和性の特徴付け定理を与える．また，クラス $\mathbf{K}$ がある公理を満たす局所次元で定義されているとき，$\mathbf{K}$ ジェネリックな飽和構造の理論が安定になるという定理を証明する．

以下，L を relational な可算言語とし，$\mathbf{K}$ を部分構造に関して閉じている有限 L 構造のクラスとする．

1 ジェネリック構造の抽象的定義

ジェネリック構成法とは，Hrushovski がモデル理論における有名な二つの予想 (Lachlan 予想と Zilber 予想) を解決する際に用いた無限モデルを作る方法である ([6],[7])．ジェネリック構造を解説した論文としては [2],[10],[5],[4],[3],[9] などがある．ジェネリック構造の定義は具体的なものから抽象的なものまで，様々な状況で様々な定義が存在するが，本章では $\mathbf{K}$ 上の二項関係 $\leq$ をいくつかの公理を満たすものとして定義し，この $(\mathbf{K}, \leq)$ に対してジェネリック構造を定義する．このようなジェネリック構造の定義は主に Wagner[10], Baldwin-Shi[2] によるものである．

公理 1.1 $\mathbf{K}$ 上の二項関係 $\leq$ は以下の公理を満たすとする．

1. $A \leq B$ ならば $A \subset B$.

2. $\leq$ は反射的かつ推移的.

3. 任意の $A \in \mathbf{K}$ に対して $\emptyset \leq A$.

*Research partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (no.19540150), Ministry of Education, Science and Culture.

4. $A, B \subset C \in \mathbf{K}$ のとき，$A \leq C$ ならば $A \cap B \leq B$.

定義および注意 1.2 1. $\overline{\mathbf{K}} = \{M :$ 任意の $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ に対して $A \in \mathbf{K}\}$

2. $A \subset M \in \overline{\mathbf{K}}$ とする．このとき任意の $X \subset_{\mathrm{fin}} M$ に対して $A \cap X \leq X$ であるとき，A は M において**閉**であるといい，$A \leq M$ と書く．

3. 有限の $A \subset M \in \overline{\mathbf{K}}$ に対して，$\mathrm{cl}_M(A) = \bigcap\{B : A \subset B \leq M\}$ と書く．(公理 1.1 より $\mathrm{cl}_M(A) \leq M$ も成り立つ.)

4. 一般の $A \subset M \in \overline{\mathbf{K}}$ に対して，$\mathrm{cl}_M(A) = \bigcup\{\mathrm{cl}_M(A') : A' \subset_{\mathrm{fin}} A\}$ と書き，A の M における**閉包**という．(この場合も $\mathrm{cl}_M(A) \leq M$ が成り立つ.) 文脈からあきらかなとき，$\mathrm{cl}_M(*)$ を省略して $\mathrm{cl}(*)$ と書くこともある．

定義 1.3 構造 M が **K ジェネリック**であるとは,

1. M の有限部分構造は $\mathbf{K}$ に属する.

2. $A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq M$ ならば，$B' \leq M$ となる A 上の B のコピー B' が存在.

3. M は**有限閉包**をもつ，すなわち，有限の $A \subset M$ に対して $\mathrm{cl}_M(A)$ も有限.

注意 1.4 1. $A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq C \in \mathbf{K}$ に対して，$B \leq BC', C' \leq BC', BC' \in \mathbf{K}$ を満たす $C' \cong_A C$ が存在するとき，$\mathbf{K}$ は**融合性**をもつという．$\mathbf{K}$ が融合性をもつとき可算 $\mathbf{K}$ ジェネリック構造は常に存在する．

2. 可算 $\mathbf{K}$ ジェネリック構造は存在する場合，それは（同型を除いて）ただひとつであることがわかる．(証明は往復論法.)

3. M を（必ずしも可算とは限らない）ジェネリック構造とする．このとき $B \cong_A B'$ かつ $A \leq B, B' \leq_{\mathrm{fin}} M$ ならば，$\mathrm{tp}(B/A) = \mathrm{tp}(B'/A)$. (証明はある種の往復論法.)

2 飽和性の特徴付け

ジェネリック構造における飽和性の特徴付け定理は，すでに[2],[10],[5]によって与えられているが,「有限言語」あるいは「局所的閉の定義可能性」などが仮定されている．ここではさらに一般的な仮定2.1のみを仮定し，飽和性の特徴付け定理を一般化することを試みる．

仮定 2.1 $A \not\leq B$ となる任意の $A \subset B \in \mathbf{K}$ に対して，次を満たす $\theta_{AB}(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{qftp}(AB)$ が存在:任意の $A' \subset B' \in \mathbf{K}$ に対して $\models \theta_{AB}(A',B')$ ならば $A' \not\leq B'$.

記号 2.2 1. $A \in \mathbf{K}$ に対して,

$$\mathrm{cltp}(A) = \{ \bigwedge_{0\leq i\leq n} \neg\exists\bar{y}_i\theta_{AB_i}(\bar{x},\bar{y}_i) : A \subset B_i \in \mathbf{K}, A \not\leq B_i, n \in \omega\}$$

と定義する．

2. $A \subset C \in \mathbf{K}$ と $\varphi \in \mathrm{cltp}(A)$ に対して，$C \models \varphi(A)$ が成り立つとき，$A \leq_{\varphi} C$ と書く．

注意 2.3 任意の $\varphi \in \mathrm{cltp}(A)$ に対して，$A \leq_{\varphi} B \leq C \in \mathbf{K}$ ならば $A \leq_{\varphi} C$.

証明 $A \not\leq_{\varphi} C$ である仮定する．このとき $C \not\models \varphi(A)$ であるので，$C \models \neg\bigwedge_i \neg\exists\bar{y}_i\theta_{AB_i}(A,\bar{y}_i)$ となる $\bigwedge_i \neg\exists\bar{y}_i\theta_{AB_i}(\bar{x},\bar{y}_i) \in \mathrm{cltp}(A)$ が存在．よって $A \subset Y \subset C$ かつ $A \not\leq Y$ となる Y が存在．一方，$A \leq_{\varphi} B$ であるので $Y \not\subset B$. よって $B \not\leq BY$ となるが，これは $B \leq C$ に矛盾．よって $A \leq_{\varphi} C$.

注意 2.4 $A \leq_{\mathrm{fin}} M \in \overline{\mathbf{K}}$ とする．このとき $A' \models \mathrm{qftp}(A) \cup \mathrm{cltp}(A)$ ならば $A' \leq M$.

証明 $A' \not\leq M$ とすると，$A' \subset B'$ かつ $A' \not\leq B'$ であるような $B' \subset_{\mathrm{fin}} M$ が存在．一方，$A' \models \mathrm{qftp}(A)$ より $A'B' \cong AB$ となる B が存在．よって仮定2.1より，$M \models \exists\bar{y}\theta_{AB}(A',\bar{y})$ を満たす $\theta_{AB} \in \mathrm{qftp}(AB)$ が存在する．これは A' が $\mathrm{cltp}(A)$ の解であることに矛盾．

補題 2.5 M を $\mathbf{K}$ ジェネリック構造とする．このとき次は同値．

1. 任意の $A \leq B \in \mathbf{K}$ と $\rho(\bar{y},\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(BA)$ および $\varphi(\bar{y}) \in \mathrm{cltp}(B)$ に対して次を満たす $\pi(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ と $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{cltp}(A)$ が存在：$\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_{\psi} C$ を満たす $A' \subset C \in \mathbf{K}$ に対して，$\models \rho(B',A'), C \leq D, B' \leq_{\varphi} D$ を満たす $B' \subset D \in \mathbf{K}$ が存在.

2. 任意の $A \leq B \in \mathbf{K}$ と $\rho(\bar{y}, \bar{x}) \in \mathrm{qftp}(BA)$ および $\varphi(\bar{y}) \in \mathrm{cltp}(B)$ に対して次を満たす $\pi(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ と $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{cltp}(A)$ が存在：$\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_{\psi} M$ ならば，$\models \rho(B', A')$ かつ $B' \leq_{\varphi} M$ を満たす B' が存在.

証明 $(1 \to 2)$ A, B, ρ, φ に対して 1 を満たす π, ψ をとる．$\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_{\psi} M$ とする．$C = \mathrm{cl}_M(A')$ とするとあきらかに $A' \leq_{\psi} C \in \mathbf{K}$. 1 より，$\models \rho(B', A'), C \leq D, B' \leq_{\varphi} D$ を満たす $B' \subset D \in \mathbf{K}$ が存在．また，M がジェネリックであることより $D \leq M$ であると仮定してよい（このとき A' は固定されている）．よって注意 2.3 より $B \leq_{\varphi} M$.
$(2 \to 1)$ A, B, ρ, φ に対して 2 を満たす π, ψ をとる．$A' \subset C \in \mathbf{K}$ は $\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_{\psi} C$ を満たしているとする．M がジェネリックであるので，$C \leq M$ と仮定してよい．よって注意 2.3 より $A' \leq_{\psi} M$ が成り立つので，2 より $\models \rho(B', A')$ かつ $B' \leq_{\varphi} M$ を満たす B' が存在．$D = B'C$ とすると，$C \leq D$ かつ $B' \leq_{\varphi} D \in \mathbf{K}$ が成り立つ.

定義 2.6 1. $A \subset B \in \mathbf{K}$ とする．このとき，$A \not\leq B$ であり，かつ，空でない任意の真部分集合 $X \subset B - A$ に対して $A \leq AX$ であるとき，$A \subset_{\min}$ と書く.

2. $\mathbf{K}$ の元の無限列で $A_0 \subset_{\min} A_1 \subset_{\min} \cdots$ を満たすものが存在しないとき，$\mathbf{K}$ は**有限閉包**をもつという.

定理 2.7 (飽和性の特徴付け) 可算 $\mathbf{K}$ ジェネリック構造 M が飽和であることと次は同値.

1. 任意の $A \notin \mathbf{K}$ に対して $\theta \in \mathrm{qftp}(A)$ が存在して，$\models \theta(A')$ ならば $A' \notin \mathbf{K}$.

2. 任意の $A \leq B \in \mathbf{K}$ と $\rho(\bar{y}, \bar{x}) \in \mathrm{qftp}(BA)$ および $\varphi(\bar{y}) \in \mathrm{cltp}(B)$ に対して次を満たす $\pi(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ と $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{cltp}(A)$ が存在：$\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_{\psi} C$ を満たす $C \in \mathbf{K}$ に対して，$\models \rho(B', A')$ かつ $C \leq D, B' \leq_{\varphi} D$ を満たす $B', D \in \mathbf{K}$ が存在.

3. $\mathbf{K}$ は有限閉包をもつ.

証明 $(\to)$ M が飽和構造であるとする.
1 を示す．もし 1 が成り立っていないとし，その証拠を $A \notin \mathbf{K}$ とする．このとき $\mathrm{qftp}(A)$ は $\mathrm{Th}(M)$ で無矛盾となる.（証明：$\theta \in \mathrm{qftp}(A)$ とする．A の選び方より，$\models \theta(A')$ かつ $A' \in \mathbf{K}$ となる A' が存在．$A' \subset M$ と思ってよいので $M \models \exists \bar{x} \theta(\bar{x})$. これは $\mathrm{qftp}(A)$ が $\mathrm{Th}(M)$ で無矛盾であることを意味する.）

よって M の飽和性より $\mathrm{qftp}(A)$ は M の中に解 A^* をもつ．従って $A^* \in \mathbf{K}$ となるが，$A^* \cong A$ であるのでこれは矛盾．

2 を示す．2 を示すには補題 2.5 の条件 2 を示せば十分．A, B, ρ, φ を固定する．背理法で証明するために，任意の $\pi(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ と $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{cltp}(A)$ に対して次を満たす A' が存在するとする：

- $\models \pi(A')$ かつ $A' \leq_\psi M$.
- $\models \rho(B', A')$ かつ $B' \leq_\varphi M$ を満たす B' が存在しない．

いま，$\mathrm{qftp}(A)$ および $\mathrm{cltp}(A)$ は $\wedge$ に関して閉じていることに注意すると，論理式の集合 $\mathrm{qftp}(A) \cup \mathrm{cltp}(A) \cup \{\neg\exists\bar{y}(\rho(\bar{y}, \bar{x}) \wedge \varphi(\bar{y}))\}$ は無矛盾．M の飽和性よりその解 A^* が M の中に存在．よって注意 2.4 より $A \cong A^* \leq M$．$B^* \in \mathbf{K}$ を $A^*B^* \cong AB$ となるようにとると，M がジェネリックであることより，$B^* \leq M$ と仮定してよい．よって $M \models \rho(B^*, A^*) \wedge \varphi(A^*)$ が成り立つが，これは A^* の取り方に矛盾．

3 を示す．3 が成り立っていないとすると，その証拠となる $\mathbf{K}$ の無限列が存在．M の飽和性よりこの無限列は M の中にあるとしてよい．このとき M の中に閉包が無限になるような有限集合が存在してしまう．これは M がジェネリックであることに矛盾．

($\leftarrow$) M が条件 1,2,3 を満たしているとする．N を $\aleph_0$ 飽和モデルとする（その濃度は非可算でもよい）．N が $\mathbf{K}$ ジェネリックであることを示す．

主張 1：$A \subset_{\mathrm{fin}} N$ ならば $A \in \mathbf{K}$.

証明：$A \notin \mathbf{K}$ となる $A \subset_{\mathrm{fin}} N$ が存在するとする．$A \notin \mathbf{K}$ より，条件 1 を満たすような $\theta(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ が存在．$N \equiv M$ より $M \models \theta(A')$ となる A' が存在．θ の選び方より $A' \notin \mathbf{K}$ となるが，これは M がジェネリックであることに矛盾．

主張 2：$A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq N$ ならば，$B' \leq N$ となる A 上の B のコピー B' が存在．

証明：まず，M は条件 1 を満たすので，補題 2.5 の条件 2 も満たす．一方，補題 2.5 の条件 2 は 1 階の性質なので N でも成り立つことに注意．そこで，$A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq N$ とする．このとき $\mathrm{qftp}(B/A) \cup \mathrm{cltp}(B)$ は無矛盾．（証明：もし矛盾しているとすると，$N \models \neg\exists\bar{y}(\rho(\bar{y}, A) \wedge \varphi(\bar{y}))$ となる $\rho(\bar{y}, A) \in \mathrm{qftp}(B/A)$ と $\varphi(\bar{y}) \in \mathrm{cltp}(B)$ が存在．これは補題 2.5 の条件 2 に矛盾．）よって N の飽和性より，$\mathrm{qftp}(B/A) \cup \mathrm{cltp}(B)$ の N における解 B' が存在．主張 1 より $N \in \overline{\mathbf{K}}$ であるので，注意 2.4 より $B \cong_A B' \leq N$.

主張 3：N は有限閉包をもつ．

証明：$\mathbf{K}$ が有限閉包をもつことより．

主張1-3より，NはKジェネリックになる．よって注意1.4より$\mathrm{Th}(N)(=\mathrm{Th}(M))$はsmallになる．従ってその可算飽和モデル$M'$が存在．$N$がジェネリックになるのと同様の議論により，$M'$もKジェネリックとなる．従って$M' \cong M$となり，$M$が飽和であることが示せた．

3 安定性

第1章および第2章では，クラス$\mathbf{K}$上の二項関係$\leq$を抽象的に定義した．本章では，まず局所次元δを公理的に定義し，δから二項関係$\leq$および次元dを定義する．すでに知られている結果として，$\mathbf{K}$上の次元dがある条件（DS）を満たすときに$\mathbf{K}$ジェネリック構造の理論が安定になるというWagnerの結果[10]がある．本章では，公理的に定義された局所次元がある公理を満たすとき，ジェネリック構造の理論は安定になることを示す．系として，局所次元が具体的な形をしているとき，ジェネリック構造の理論は常に安定になるという結果が得られる．

定義 3.1 (局所次元) 関数$\delta : \mathbf{K} \to \mathbf{R}^{\geq 0}$が次の三つの条件，

1. 任意の$AB \in \mathbf{K}$に対して，$\delta(AB) - \delta(B) \leq \delta(A) - \delta(A \cap B)$.
2. $A \cong B \in \mathbf{K}$ならば$\delta(A) = \delta(B)$.
3. $\delta(\emptyset) = 0$.

を満たすとき，$\mathbf{K}$上の**局所次元**という．

記号 3.2 $\delta(A/B)$は$\delta(A \cup B) - \delta(B)$の略記．

定義 3.3 (δによる$\leq$の定義) $A \subset B \in \mathbf{K}$とする．このとき任意の$X \subset B - A$に対して$\delta(X/A) \geq 0$が成り立つとき，$A \leq B$と定義する．

注意 3.4 上のように定義された二項関係$\leq$は公理1.1および仮定2.1を満たす．よって第1章および第2章で得られた結果はすべて用いることができる．特に，ジェネリック構造における閉包はタイプ定義可能である．

定義 3.5 (δによるdの定義) Mを$\mathbf{K}$ジェネリック構造とする．このとき$A \subset_{\mathrm{fin}} M$に対して

$$d_M(A) = \inf\{\delta(B) : A \subset B \leq_{\mathrm{fin}} M\}$$

と定義する．この $d_M(A)$ を A の M における**次元**という．文脈からあきらかなとき，$d_M(*)$ を省略して $d(*)$ と書くこともある．$A, B \subset_{\mathrm{fin}} M$ のとき，$d_M(A/B) = d_M(AB) - d_M(B)$ と略記する．$A \subset_{\mathrm{fin}} M, B \subset M$ のとき，$d_M(A/B) = \inf\{d_M(A/B') : B' \subset_{\mathrm{fin}} B\}$ と定義する．

注意 3.6 M を $\mathbf{K}$ ジェネリック構造とし，d_M を次元とする．このとき

1. 任意の $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ に対して，$d_M(A) = \delta(\mathrm{cl}_M(A))$.
2. 任意の $AB \subset_{\mathrm{fin}} M$ に対して，$d_M(A/B) \leq d_M(A/A \cap B)$.

定義 3.7 $M \in \overline{\mathbf{K}}$ とする．$A = B \cap C$ を満たす $A, B, C \subset M$ に対して，B と C が A 上**自由**（記号:$B \perp_A C$）であるとは，任意の $R \in L$ に対して $R^{BC} = R^B \cup R^C$ を満たすこととする．

公理 3.8 1. 任意の $AB \in \mathbf{K}$ に対して，$A \perp_{A \cap B} B$ と $\delta(A/B) = \delta(A/A \cap B)$ は同値．

2. $A \subset A', B \subset B', C \subset C', A'B'C' \in \mathbf{K}$，および，$A', B', C'$ が互いに素であるとき，$\delta(A/C) - \delta(A/BC) \leq \delta(A'/C') - \delta(A'/B'C')$.

注意 3.9 $A \in \mathbf{K}$ に対して $\delta(A) = |A| - \sum_i \alpha_i |R_i^A|$（ここで各 α_i は $0 < \alpha_i < 1$ を満たす実数）とするとき，δ は公理 3.8 を満たすような局所次元となる．

証明 δ が局所次元になることはほぼあきらか．δ が公理 3.8 を満たすことを示す．ここで，互いに素な X, Y に対して $r(X, Y) = \sum_i \alpha_i |R_i^{XY} - (R_i^X \cup R_i^Y)|$ と書くとする．1 については，$A \perp_{A \cap B} B$ iff $r(A - A \cap B, B) = r(A - A \cap B, A \cap B)$ iff $\delta(A/B) = \delta(A/A \cap B)$ であるので．2 について．公理 3.8 の仮定を満たすような A, B, C, A', B', C' を取る．このとき $\delta(A/C) - \delta(A/BC) = r(A, BC) - r(A, C) \leq r(B', A'C') - r(B', A') = \delta(B'/A') - \delta(B'/A'C')$.

注意 3.10 Hrushovski のジェネリック構造 [6],[7] をはじめとして，多くの $\mathbf{K}$ ジェネリック構造が 3.9 のような具体的な局所次元によってクラス $\mathbf{K}$ が定義されている（たとえば [1],[5],[8] など）．

仮定 3.11 以下，M を可算 $\mathbf{K}$ ジェネリックな飽和構造とし，$\mathcal{M}$ をビッグモデルとする．

注意 3.12 $\mathcal{M}$ は $\mathbf{K}$ ジェネリック．

証明 M は可算 $\mathbf{K}$ ジェネリックな飽和構造であるので，$\mathbf{K}$ は定理 2.7 の条件 1–3 を満たしている．
主張 1：$A \subset_{\mathrm{fin}} \mathcal{M}$ ならば $A \in \mathbf{K}$．
証明：$A \subset_{\mathrm{fin}} \mathcal{M}$ かつ $A \notin \mathbf{K}$ となる A が存在したとする．定理 2.7 の条件 1 より，$\models \theta(A')$ ならば $A' \notin \mathbf{K}$ であるような $\theta(\bar{x}) \in \mathrm{qftp}(A)$ が存在．特に $\mathcal{M} \models \exists\bar{x}\theta(\bar{x})$ であるので，$\theta(A')$ となる $A' \subset M$ が存在．θ の選び方より $A' \notin \mathbf{K}$ となるが，これは M がジェネリックであることに矛盾．
主張 2：$A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq \mathcal{M}$ ならば，$B' \leq \mathcal{M}$ となる $B' \cong_A B$ が存在．
証明：M の飽和性より $\mathrm{tp}(A^*) = \mathrm{tp}(A)$ となる $A^* \leq M$ が存在．さらに M が $\mathbf{K}$ ジェネリックであることより，$B^* \leq M$ かつ $A^*B^* \cong AB$ を満たす B^* が存在．よって $\mathrm{tp}(AB') = \mathrm{tp}(A^*B^*)$ となる $B' \subset \mathcal{M}$ が存在する．$B^* \leq M$ より $B' \leq \mathcal{M}$．また $AB' \cong A^*B^* \cong AB$ より $B' \cong_A B$．
主張 3：$\mathcal{M}$ は有限閉包をもつ．
証明：定理 2.7 の条件 3 よりあきらか．
　以上より，$\mathcal{M}$ は $\mathbf{K}$ ジェネリック．

記号 3.13 $B, C \leq \mathcal{M}$ かつ $A = B \cap C$ に対して，$B \perp_A C$ かつ $BC \leq \mathcal{M}$ を満たすとき $B \downarrow^g_A C$ と書く．

補題 3.14 局所次元 δ が公理 3.8 を満たすとする．$B, C \leq \mathcal{M}$ かつ $A = B \cap C$ とする．このとき $B \not\downarrow^g_A C$ ならば，次の条件を満たす $\gamma > 0$ と $B_0 \subset_{\mathrm{fin}} B$ と $C_0 \subset_{\mathrm{fin}} C$ が存在する．

> $B_0 \subset B' \leq_{\mathrm{fin}} B$ かつ $C_0 \subset C' \leq_{\mathrm{fin}} C$ を満たす任意の B' と C' に対して $d(B'/B' \cap C') \geq d(B'/C') + \gamma$．

証明 $B \not\downarrow^g_A C$ とし，次の二つの場合に分けて考える．
場合 1:$B \not\perp_A C$ のとき．ある $B_0 \subset_{\mathrm{fin}} B$ と $C_0 \subset_{\mathrm{fin}} C$ が存在して，$B_0 \not\perp_{B_0 \cap C_0} C_0$．$\gamma = \delta(B_0/B_0 \cap C_0) - \delta(B_0/C_0)$ とおくと，公理 3.8 より $\gamma > 0$．注意 3.12 より，$B_0 \subset B' \leq_{\mathrm{fin}} B$ かつ $C_0 \subset C' \leq_{\mathrm{fin}} C$ となる B', C' が存在．公理 3.8 より $\gamma \leq \delta(B'/B' \cap C') - \delta(B'/C')$．よって $d(B'/B' \cap C') = \delta(B'/B' \cap C') \geq \delta(B'/C') + \gamma \geq d(B'/C') + \gamma$．
場合 2：$B \perp_A C$ かつ $BC \not\leq \mathcal{M}$ のとき．ある $B_0 \leq_{\mathrm{fin}} B$ と $C_0 \leq_{\mathrm{fin}} C$ が存在して $B_0C_0 \not\leq \mathcal{M}$．$E_0 = \mathrm{cl}(B_0C_0) - B_0C_0$ とし，$\gamma = -\delta(E_0/B_0C_0) > 0$ とおく．B', C' を $B_0 \subset B' \leq_{\mathrm{fin}} B$ かつ $C_0 \subset C' \leq_{\mathrm{fin}} C$ を満たすように任意に取る．$E' = \mathrm{cl}(B'C') - B'C'$ とする．このとき $\delta(E'/B'C') \geq \delta(E'/B_0C_0) = \delta(E'/E_0B_0C_0) + \delta(E_0/B_0C_0) \geq \delta(E_0/B_0C_0) = -\gamma$．一方，$B \perp_A C$ であるので公理 3.8 より $\delta(B'/C') = \delta(B'/B' \cap C')$．よって $d(B'/B' \cap C') =$

$\delta(B'/B'\cap C') = \delta(B'/C') = \delta(\mathrm{cl}(B'C')/C') - \delta(\mathrm{cl}(B'C')/B'C') = d(B'/C') - \delta(E'/B'C') \geq d(B'/C') + \gamma$.

定義 3.15 M を $\mathbf{K}$ ジェネリック構造とする．

1. $A \subset M$ かつ $B, C \subset_{\mathrm{fin}} M$ のとき，$d(B/AC) = d(B/A)$ かつ $\mathrm{cl}_M(BA) \cap \mathrm{cl}_M(CA) = \mathrm{cl}_M(A)$ を満たすとき $B \downarrow^d_A C$ と定義する．

2. $A, B, C \subset M$ のとき，任意の $B_0 \subset_{\mathrm{fin}} B, C_0 \subset_{\mathrm{fin}} C$ に対して $B_0 \downarrow^d_A C_0$ となるとき $B \downarrow^d_A B$ と定義する．

補題 3.16 局所次元 δ が公理 3.8 を満たすとする．$B, C \leq \mathcal{M}$ かつ $A = B \cap C$ とする．このとき $B \downarrow^d_A C$ ならば $B \downarrow^g_A C$.

証明 $B \not\downarrow^g_A C$ とすると，補題 3.14 を満たす γ, B_0, C_0 が存在する．$A_0 \subset_{\mathrm{fin}} A$ を $d(B_0/A_0) - d(B_0/A) < \gamma/2$ かつ $d(C_0/A_0) - d(C_0/A) < \gamma/2$ となるようにとる．$B' = \mathrm{cl}(B_0A_0), C' = \mathrm{cl}(C_0A_0), A' = B' \cap C'$ とする．いま，$B \downarrow^d_A C$ より $d(B_0C_0/A) = d(B_0/A) + d(C_0/A)$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
& d(B'C') \\
& \quad = \quad d(B_0C_0A_0) \\
& \quad = \quad d(B_0C_0/A_0) + d(A_0) \\
& \quad \geq \quad d(B_0C_0/A) + d(A_0) \\
& \quad = \quad d(B_0/A) + d(C_0/A) + d(A_0) \\
& \quad > \quad d(B_0/A_0) + d(C_0/A_0) + d(A_0) - \gamma \\
& \quad = \quad d(B'/A_0) + d(C') - \gamma \\
& \quad \geq \quad d(B'/A') + d(C') - \gamma \\
& \quad \geq \quad d(B'/C') + d(C') \\
& \quad = \quad d(B'C')
\end{aligned}
$$

よって矛盾．

注意 3.17 $B' \subset B \subset_{\mathrm{fin}} \mathcal{M}$ かつ $A, C \subset \mathcal{M}$ であるとき，$d(B/A) = d(B/AC)$ が成り立つならば $d(B'/A) = d(B'/AC)$ が成り立つ．実際，$d(B'/A) = d(B/A) - d(B/B'A) \leq d(B/A) - d(B/B'AC) = d(B/AC) - d(B/B'AC) = d(B'/AC)$.

定理 3.18 局所次元 δ が公理 3.8 を満たしているとする．M を $\mathbf{K}$ ジェネリックな飽和構造とする．このとき $\mathrm{Th}(M)$ は安定となる．

証明 $T = \mathrm{Th}(M)$ とし，$\mathcal{M}$ をビッグモデルとする．$N \prec \mathcal{M}$ とし，N 上のタイプの数を数える．$\bar{e} \in \mathcal{M}$ とすると，$d(\bar{e}/N) = d(\bar{e}/A_0)$ を満たす可算な $A_0 \subset N$ が存在．$E = \mathrm{cl}(\bar{e}A_0)$ とし，$A = E \cap N$ とする．あきらかに $\mathrm{cl}(\bar{e}A) \cap N = E \cap N = A$. また $d(\bar{e}/A) \leq d(\bar{e}/A_0) = d(\bar{e}/N)$ であるので $d(\bar{e}/A) = d(\bar{e}/N)$. よって注意 3.17 より $\bar{e}\downarrow^d_A N$ を得る．
主張：$\mathrm{tp}(\bar{e}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{e}/A)$ かつ $\bar{e}'\downarrow^d_A N$ ならば $\mathrm{tp}(\bar{e}'/N) = \mathrm{tp}(\bar{e}/N)$.
証明:$E' = \mathrm{cl}(e'A)$ とおくと，補題3.16 より $E\downarrow^g_A N$ かつ $E'\downarrow^g_A N$. 一方，$\mathrm{tp}(\bar{e}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{e}/A)$ より $E' \cong_A E$. よって $E \perp_A N$ かつ $E' \perp_A N$ より $E'N \cong_N EN$ を得る．さらに $E'N, EN \leq \mathcal{M}$ より $\mathrm{tp}(E'/N) = \mathrm{tp}(E/N)$. 従って $\mathrm{tp}(\bar{e}'/N) = \mathrm{tp}(\bar{e}/N)$.
　主張より，$|S(N)| \leq |S(A)| \cdot |N|^\omega \leq 2^\omega \cdot |N|^\omega = |N|^\omega$. 従って T は安定である．

系 3.19 局所次元が $\delta(A) = |A| - \sum_i \alpha_i |R_i^A|$ で定義されているとする（ここで各 α_i は $0 < \alpha_i < 1$ を満たす実数）．M を **K** ジェネリックな飽和構造とする．このとき $\mathrm{Th}(M)$ は安定となる．

証明 注意 3.9 より．

References

[1] J. T. Baldwin, An almost strongly minimal non-Desarguesian projective plane, Transactions of American Mathematical Society 342 (1994) 695–711

[2] J. T. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, Annals of Pure and Applied Logic 79 (1996) 1–35

[3] D. Evans, $\aleph_0$-categorical structures with a predimension, Annals of Pure and Applied Logic 116 (2002) 157–186

[4] J. Goode, Hrushovski's geometries, In Helmut Wolter Bernd Dahn, editor, *Proceedings of 7th Easter Conference on Model Theory* (1989) 106–118

[5] B. Herwig, Weight ω in stable theories with few types, Journal of Symbolic Logic 60 (1995) 353–373

[6] E. Hrushovski, A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane, preprint, 1988

[7] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, Annals of Pure and Applied Logic 62 (1993) 147–166

[8] K. Ikeda, Minimal but not strongly minimal structures with arbitrary finite dimension, Journal of Symbolic Logic 66 (2001) 117–126

[9] D. W. Kueker and C. Laskowski, On generic structures, Notre Dame Journal of Formal Logic 33(1992) 147–166

[10] F. O. Wagner, Relational structures and dimensions, In *Automorphisms of first-order structures*, Clarendon Press, Oxford (1994) 153–181